Számítástudomány alapjai

2. Élhozzáadási lemma, fák, erdők

**Élhozzáadási lemma:** G irányítatlan gráfhoz hozzáadunk ’e’ élt = G’ gráf. Pontosan 1 eset valósul meg a kettő közük:

1. G és G’ komponensei megegyeznek, de G’-nek több köre van
2. G és G’ körei megegyeznek, és G’-nek eggyel kevesebb komponense van

**Def:** A körmentes irányítatlan gráfot **erdő**nek nevezzük.

**Def:** Összefüggő erdő **fa**.

**Def:** Egy erdő minden komponense fa.

**Lemma:** G n csúcsú k komponensű erdő: E(G) = n-k

**Biz:** Építsük fel G-t \(Kn) üresgráfból. ÉlHal miatt körmentes. Kn-nek n komponense van, G-nek K, ezért n-k élt kellet behúzni G felépítéséhez.

**Lemma:** Ha G fa, akkor élszáma = n-1. **Biz:** A fa egy 1 komponensű erdő.

**Állítás**: Tetsz. n-csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely

kettőből következik a harmadik.

(a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) |E(G)| = n − 1.

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

(1) (F − e)-nek pontosan két komponense van ∀e ∈ E(F )-re.

(2) F -nek pontosan egy uv-útja van ∀u, v ∈ V (F )-re.

(3) (F + e)-nek pontosan egy köre van ∀e 6 ∈ E(F )-re.

(4) Ha n ≥ 2, akkor F -nek legalább két levele van.

**Biz:** Induljunk el F egy tetsz. v csúcsából egy sé-

tán, és haladjunk, amíg tudunk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb

ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től

különböző u levélben történhet. Ha d(v) = 1, akkor v egy u-tól különböző

levél. Ha d(v) ≥ 2, akkor sétát indulhatjuk v-ből egy másik él mentén. Ekkor

egy u-tól különböző levélben akadunk el.

**Feszítőfák:** Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉlHaL szerinti

kiszínezésével! (A kompenensszámot csökkentő élt zöldre, a kört létrehozó

élt pirosra színezzük.).

Legyen G′ a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!

G és G′ komponensei megegyeznek.

A G gráf zöld élei olyan G′ feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő,

és komponensei megegyeznek G komponenseivel.

**Def**: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható

fa.

**Állítás**: (G-nek van feszítőfája) ⇐⇒ (G öf.)

**Biz**: ⇒: Legyen F a G ffája. F öf, és V (F ) = V (G), tehát G bármely

két csúcsa között vezet F -beli út.

⇐: Építsük fel G-t az élek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Lát-

tuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen kompnense van,

hiszen G is egykomponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G-ből éltörlésekkel

kapható.

**Def:** A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Qf alap vágást G azon

élei alkotják, amik az F − f két komponense között futnak.

**Def:** Az e ∈ E(G)\E(F ) éléhez tartozó Ce alapkör az F +e köre.